2016.11.25

ガウス求積

5 次の多項式で近似する場合

定められた x の区間が 5 次式で表せられるとする。

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \tag{1}$$

積分区間を [a,b] とし、その間を式 (2) のように変数変換する。

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}z \tag{2}$$

求める積分は

$$S = F(b) - F(a) = \int_a^b ydx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 ydz = N(b-a) \tag{3}$$

N は区間 $[a,b]$ における $y = f(x)$ すなわち y 軸の高さの平均値である。y は x の 5 次式なので式 (2) で変換しても y は z の 5 次式である。

$$y = f(z) = {a_0}' + {a_1}'z + {a_2}'z^2 + {a_3}'z^3 + {a_4}'z^4 + {a_5}'z^5 \tag{4}$$

区間 [-1,1] で定積分し式 (3) に代入して整理する。

$$N = {a_0}' + \frac{{a_2}'}{3} + \frac{{a_4}'}{5} \tag{5}$$

ここで、N が x 軸上の 3 点 z_1, z_2, z_3 に対応する y_1, y_2, y_3 および定数 K_1, K_2, K_3 を用いて以下のとおり表せられるものとする。

$$N = K_1y_1 + K_2y_2 + K_3y_3 \tag{6}$$

$(z_1, y_1)(z_2, y_2)(z_3, y_3)$ の関係を式 (4) に用い、式 (6) に代入すると

$$\begin{aligned}
N =& K_1({a_0}' + {a_1}'z_1 + {a_2}'{z_1}^2 + {a_3}'{z_1}^3 + {a_4}'{z_1}^4 + {a_5}'{z_1}^5) \\
&+ K_2({a_0}' + {a_1}'z_2 + {a_2}'{z_2}^2 + {a_3}'{z_2}^3 + {a_4}'{z_2}^4 + {a_5}'{z_2}^5) \\
&+ K_3({a_0}' + {a_1}'z_3 + {a_2}'{z_3}^2 + {a_3}'{z_3}^3 + {a_4}'{z_3}^4 + {a_5}'{z_3}^5) \\
=& {a_0}'(K_1 + K_2 + K_3) + {a_1}'(K_1z_1 + K_2z_2 + K_3z_3) + {a_2}'(K_1{z_1}^2 + K_2{z_2}^2 + K_3{z_3}^2) \\
&+ {a_3}'(K_1{z_1}^3 + K_2{z_2}^3 + K_3{z_3}^3) + {a_4}'(K_1{z_1}^4 + K_2{z_2}^4 + K_3{z_3}^4) \\
&+ {a_5}'(K_1{z_1}^5 + K_2{z_2}^5 + K_3{z_3}^5)
\end{aligned} \tag{7}$$

式 (5) と式 (7) を係数比較

$$K_1 + K_2 + K_3 = 1 \tag{8}$$
$$K_1 z_1 + K_2 z_2 + K_3 z_3 = 0 \tag{9}$$
$$K_1 {z_1}^2 + K_2 {z_2}^2 + K_3 {z_3}^2 = 1/3 \tag{10}$$
$$K_1 {z_1}^3 + K_2 {z_2}^3 + K_3 {z_3}^3 = 0 \tag{11}$$
$$K_1 {z_1}^4 + K_2 {z_2}^4 + K_3 {z_3}^4 = 1/5 \tag{12}$$
$$K_1 {z_1}^5 + K_2 {z_2}^5 + K_3 {z_3}^5 = 0 \tag{13}$$

$K_1, K_2, K_3, z_1, z_2, z_3$ について解く

$$K_1 = K_3 = 5/18$$
$$K_2 = 4/9$$
$$z_1 = -\sqrt{3/5}$$
$$z_2 = 0$$
$$z_3 = \sqrt{3/5}$$

以上でガウス積分の三分点の位置と係数が求まった。

□